用於生醫訊號處理之Ramanujan Sums處理器設計與實現

電機資訊學士班 黃碩安

Ramanujan Sums

- Ramanujan Rums 的數學式為 $c_q(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,q)=1}}^{q} e^{j2\pi kn/q}$ 而Ramanujan Sums的特殊性質為每個element均為整數，而且還有正交性。因 此我們就可以利用不同的Ramanujan Sums來當basis，把訊號投影在這些basis上來做進一步的訊號分析。其中投影有兩種形式:

1. $$x(n) = \sum_{q=1}^{N} a_q c_q(n), \quad 0 \le n \le N-1$$

2. $$x(n) = \sum_{q_i|N} \underbrace{\sum_{l=0}^{\phi(q_i)-1} \beta_{il} c_{q_i}(n-l)}_{x_{q_i}(n)}$$

$$c_1(n) = 1$$
$$c_2(n) = 1, -1$$
$$c_3(n) = 2, -1, -1$$
$$c_4(n) = 2, 0, -2, 0$$
$$c_5(n) = 4, -1, -1, -1, -1$$

Ramanujan sums example

Properties of Ramanujan Sums

- Symmetric property

$$c_q(n) = c_q(q-n)$$

- Othogonality

$$\sum_{n=0}^{m-1} c_{q_1}(n) c_{q_2}(n) = 0, \quad q_1 \neq q_2.$$

- Periodicity

$$c_q(n+q) = c_q(n)$$

- Multiplicative property

$$c_{q_1 q_2}(n) = c_{q_1}(n) c_{q_2}(n)$$

- Prime q

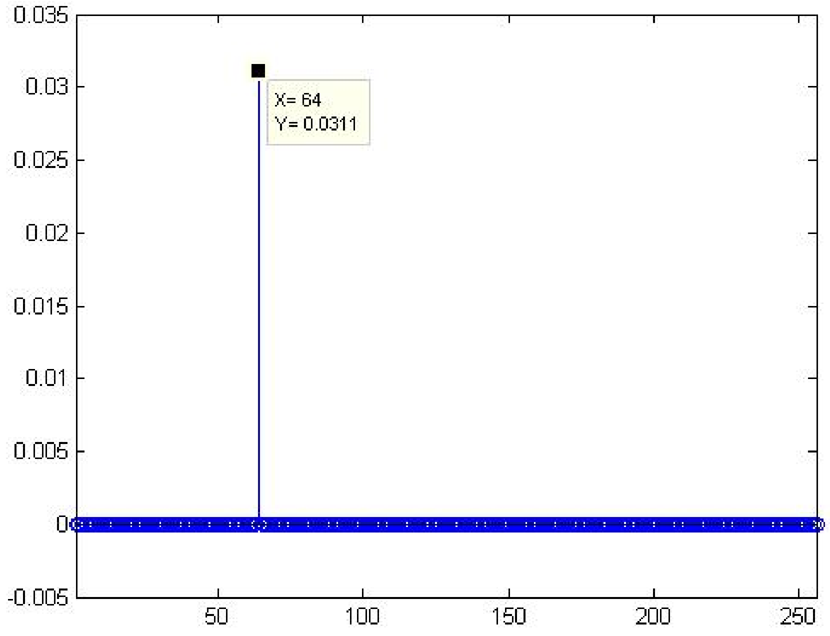
$$c_q(n) = \begin{cases} q-1 & \text{if } n = \text{mul.of } q \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

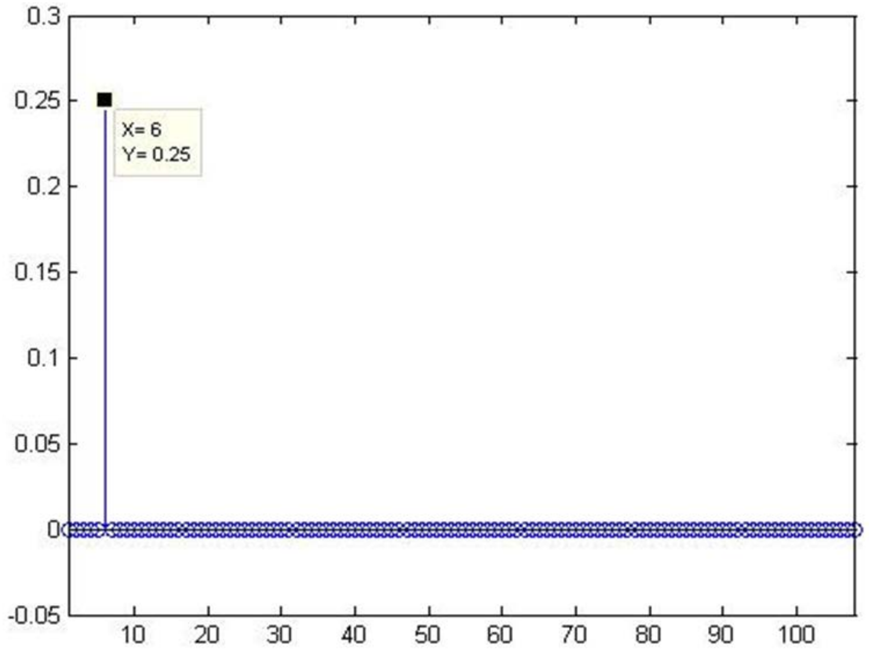
- Recursion

$$c_q(n) = q\delta((n))_q - \sum_{\substack{q_k \mid q \\ q_k < q}} c_{q_k}(n)$$

Functional Verification

- The coefficient in the Ramanujan FIR representation for two FIR signals, sinusoid $\cos(\frac{2\pi}{64}n)$ with N = 256 and $\cos(\frac{2\pi}{6}n)$ with N = 108





Potential Applications

- 利用Ramanujan Sums來拆解訊號，可以找出週期訊號的週期。
- 當兩個或是兩個以上的週期訊號混合時，會產生新的週期訊號，此時就會有hidden period。利用Ramanujan Sums也可以找出最原始個別訊號的週期。因此在生醫訊號上，如心電圖，就可以拿來分析QPRS波的規律性。
- 在生醫訊號上經常需要濾掉雜訊，當我們可以拆解訊號時，就可以拿來去除雜訊。想要濾掉低頻雜訊，先把訊號投影到Ramanujan Sums basis，再將低頻部分的係數改為0，在還原成原來訊號，就可以得到去掉低頻雜訊的訊號。因此相對於FFT (如N = 256)，Ramanujan sums 不用做到N點的投影就可以將雜訊濾出來，在速度上會有所提升。

Future Work

- Ramanujan sums擁有整數運算的特性，所以相較於FFT就不需要使用複數的運算器。而且Ramanujan sums 有許多特性，如週期性和對稱性，可以讓我們有化簡的空間。目前的找係數的方法都需要使用到high-dimension的matrix inversion，在硬體上無法有效的實現。因此未來的目標就是化簡Ramanujan sums的運算程序，比direct的方法在面積或是速度上有所改善，並建立出清楚且完整個運算架構圖。

- References

  - [1] P. P. Vaidyanathan, “Ramanujan sums in the context of signal processing—Part I: Fundamentals,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no. 16, pp. 4145–4157, 2014.
  - [2] P. P. Vaidyanathan, “Ramanujan sums in the context of signal processing—Part II: FIR representations and applications,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no.16, pp. 4158–4172, 2014.